CÁLCULO I - ANÁLISIS MATEMATICO I

FUNCIÓN INVERSA

ALCALÁ-NEME

UNSL

2017

Función Inversa

- Estudiaremos aspectos generales del proceso de **inversión de funciones** y su aplicación a funciones conocidas y a otras nuevas.
- Dadas dos variables relacionadas por la regla $y = f(x)$, muchas veces es conveniente expresar la relación en la variable implícita: $x = g(y)$.
- Así como una función $f : A \to B$ transforma los puntos de un conjunto A en puntos de otro conjunto B, es fácil imaginar una acción inversa que los devuelva a su forma original.
- Para que esa acción inversa también sea una función, es decir, $g : B \to A$, es necesario que f no haya "mezclado puntos".
- Si hay dos puntos distintos, x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2) = y$, g no tiene cómo decidir si $g(y) = x_1$ ó $g(y) = x_2$.

Funciones Inyectivas

- Las funciones que no envían puntos diferentes a la misma imagen, se llaman **inyectivas** o **uno a uno**. Es decir,

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right).$$

- Lo mismo puede decirse sin negaciones, lo que da lugar a la definición formal de función inyectiva.

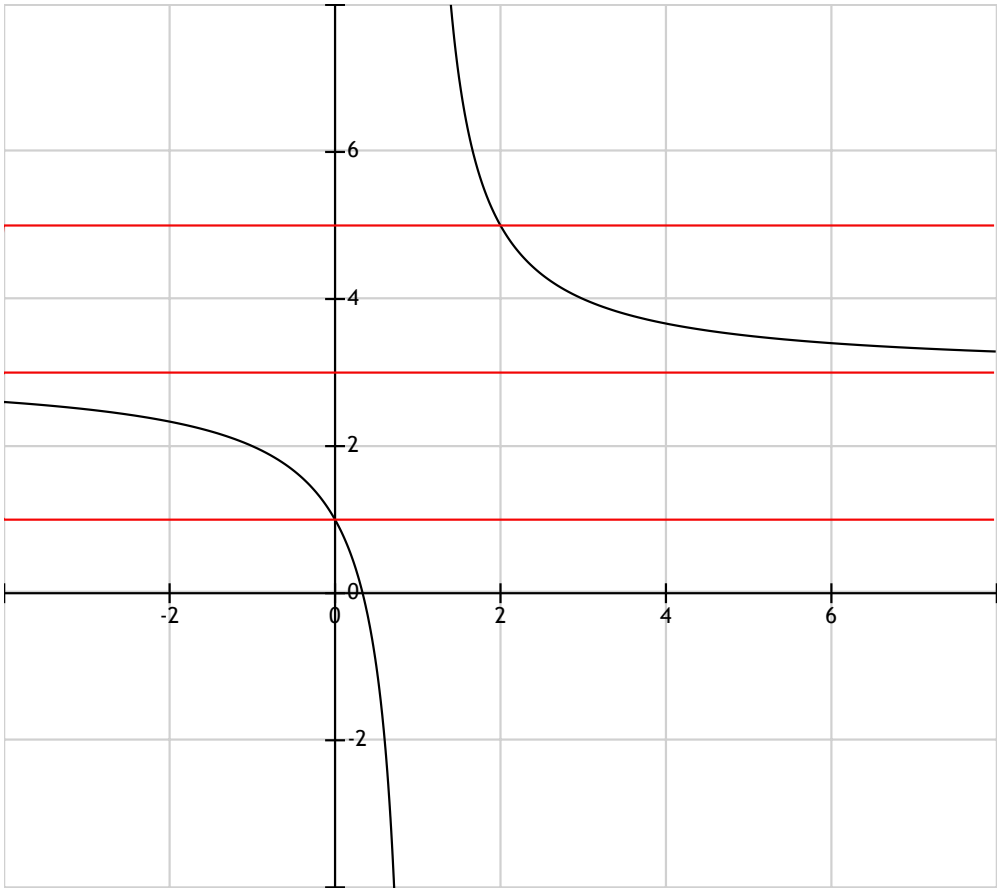
  Definición 1: *Una función f es inyectiva si*

$$f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) \Longrightarrow x_1 = x_2. \tag{1}$$

- La condición de inyectividad se manifiesta gráficamente de la siguiente manera: f es inyectiva si ninguna recta horizontal corta al gráfico en más de un punto.

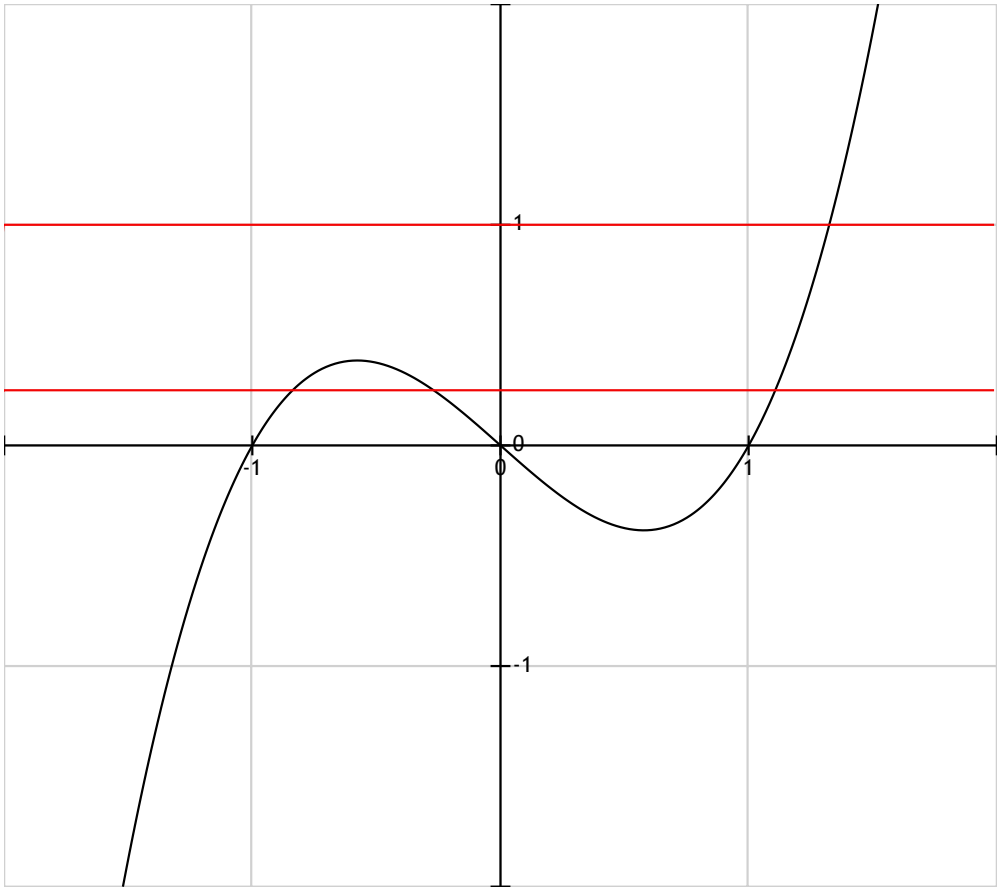
Funciones Inyectivas: Ejemplos

$y = \frac{3x-1}{x-1}$



Funciones Inyectivas: Ejemplos

$y = x^3 - x$



Definición de Función Inversa

- Si $f : A \to B$, es inyectiva:
  - dado $y \in \mathrm{Rg}(f)$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$;
  - ese x es único.
- Entonces puede definirse $g(y) = x$.
- La función g se llamará **inversa de f** y su dominio será $\mathrm{Rg}(f)$.
- Ya que g trae de regreso a x hasta su sitio de partida, aplicar sucesivamente la función y su inversa da como resultado

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{y} \quad (f \circ g)(y) = y. \tag{2}$$

- Nótese la simetría de roles de f y g. La condición de ser inversa es **recíproca**: g es función inversa de f si y sólo si f es inversa de g.

Definición de Función Inversa

Definición 2. *Dos funciones* $f : A \to B$ *y* $g : B \to A$ *son inversas una de la otra si*

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{para } x \in A \quad y$$

$$(f \circ g)(y) = y \quad \text{para } y \in B.$$

- Usaremos la notación $g = f^{-1}$, lo que implica

$$f = g^{-1} \quad \text{y} \quad \left(f^{-1}\right)^{-1} = f. \tag{3}$$

- Una manera alternativa de expresar que g es la inversa de f es la siguiente:

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = g(y). \tag{4}$$

Ejemplos

1. La función $f(x) = x^3$ es inyectiva y admite una inversa: $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Comprobación:
$$\sqrt[3]{x^3} = x, \qquad \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x.$$
2. La función $f(x) = x^2$ no es inyectiva. Cualquier recta horizontal $y = r$ con $r > 0$ corta a la parábola $y = x^2$ en dos puntos. Sin embargo, se habla de la raíz cuadrada de x si $x \geq 0$. Lo que ocurre es que la restricción de f al intervalo $[0, +\infty)$ sí es inyectiva y $g(x) = \sqrt{x}$ es su inversa:
$$\sqrt{x^2} = x, \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \qquad x \geq 0.$$

Subdominios de inyectividad

- Diremos que "f es inyectiva en A" para indicar que "la restricción de f al conjunto A es inyectiva".

  Definición 1(bis). *La función f es inyectiva en el conjunto A si*

  $$[x_1, x_2 \in A \ \wedge \ f(x_1) = f(x_2)] \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

- Dada una función cualquiera, buscando un subdominio de inyectividad, se puede obtener una inversa

  Teorema 1. *Si f es inyectiva en A, su restricción $f|_A$ tiene una inversa $g : f(A) \to A$. Es decir, una función g con dominio en $f(A)$ tal que*

  $$g\left(f(x)\right) = x, \ \textit{para } x \in A \quad y \quad f\left(g(x)\right) = x, \ \textit{para } x \in g\left(A\right).$$

Subdominios de inyectividad: criterios

- Una función f estrictamente monótona es inyectiva, por lo tanto, cumple que: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ (*condición suficiente*)
- En efecto, si fuese $x_1 \neq x_2$, o bien $f(x_1) < f(x_2)$ o $f(x_1) > f(x_2)$, pero no habrá igualdad.
- Los intervalos de monotonía (capítulo 3) son buenos dominios de subinyectividad que permiten encontrar funciones inversas.
- Pero si la función es continua y el dominio es un intervalo, la monotonía estricta también es *condición necesaria* para la inyectividad (la prueba se basa en el teorema de Bolzano).

Teorema 2. *Una función continua es inyectiva en un intervalo si y sólo si es estrictamente monótona en él.*

Subdominios de inyectividad: criterios

- Dada una función continua y un intervalo A de monotonía estricta (o sea, de inyectividad), nos interesará conocer el dominio de la función inversa de la restricción $f|_A$.

  Teorema 3. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y estrictamente monótona, entonces existe su inversa f^{-1} con dominio en el intervalo $[f(a), f(b)]^*$.*

  Si $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ es continua y estrictamente monótona y además $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, entonces existe f^{-1} con dominio en el intervalo $[f(a), \pm\infty)^*$.

  Análogo resultado vale cuando el límite infinito se produce en el extremo izquierdo del intervalo o en ambos.

Demostración del Teorema 3. *El Teorema 1 afirma que el dominio de la función inversa de la restricción $f|_A$ es $f(A)$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, $f(A)$ es un intervalo. Siendo f monótona, los extremos de $f(A)$ serán las imágenes de los extremos del intervalo A: Si f es creciente, $f(A) = [f(a), f(b)]$; si f es decreciente, $f(A) = [f(b), f(a)]$. Entonces el dominio de f^{-1} es el intervalo $[f(a), f(b)]^*$.*

Para la segunda parte, si f es estrictamente creciente en $[a, b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$, no cabe duda que $\mathrm{Rg}(f) \subset [f(a), +\infty)$, porque no puede ser $f(x) < f(a)$ para un $x \geq a$. La inclusión inversa $[f(a), +\infty) \subset \mathrm{Rg}(f)$ está probada en el ejemplo 2 de la sección 3.4. La prueba es análoga para el caso que f es estrictamente decreciente en $[a, b)$. ■

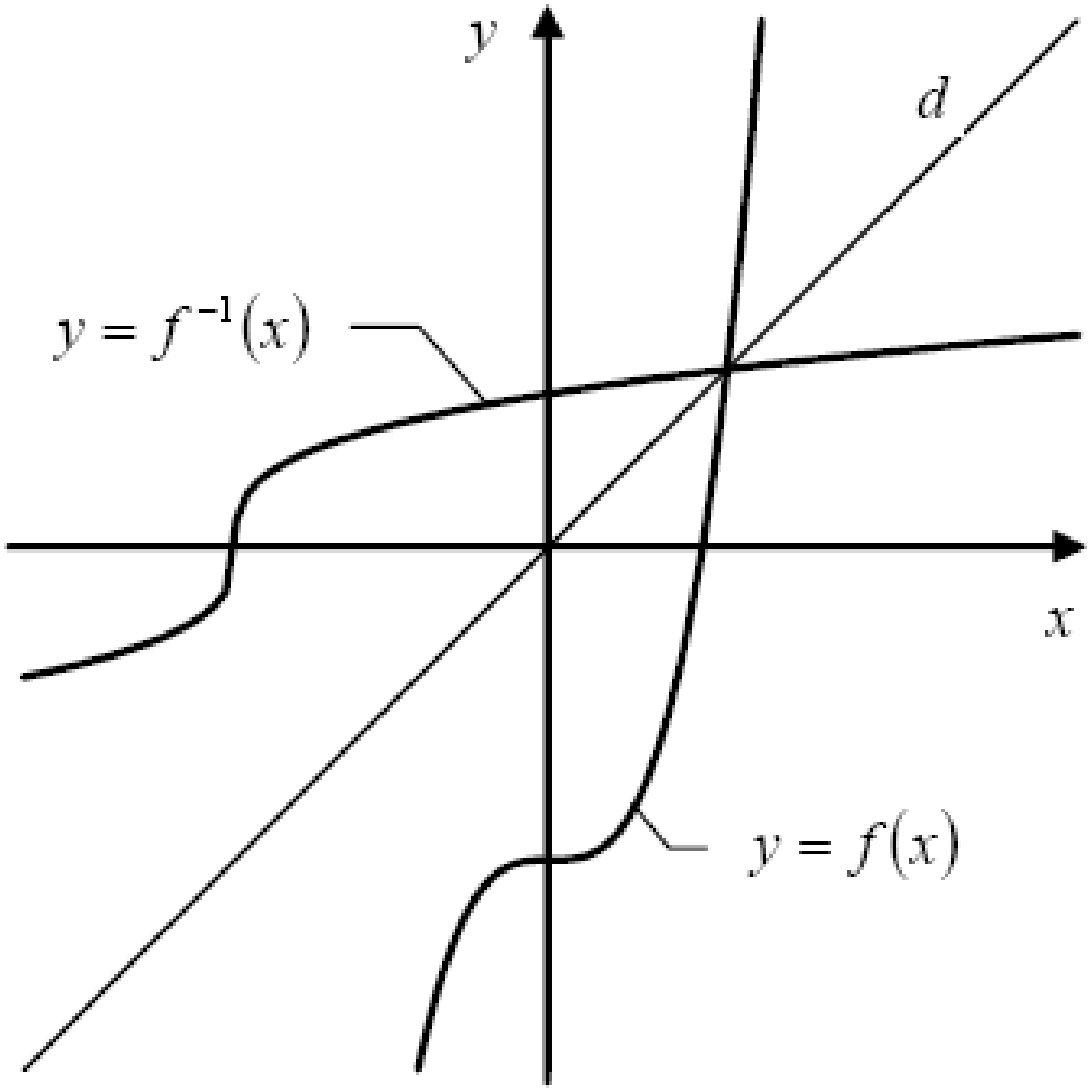
Relación entre gráficos

- Es interesante ver la relación existente entre los gráficos de un par f, g de funciones inversas.
- Para ello, queremos ver el gráfico de g en el mismo sistema de coordenadas que el de f. O sea: un punto $(x, y) \in \mathrm{Gr}(g)$ si y sólo si $y = g(x)$.
- Entonces, de acuerdo con la relación (4),

$$(x, y) \in \mathrm{Gr}(g) \iff y = g(x) \iff x = f(y) \iff (y, x) \in \mathrm{Gr}(f).$$

- Esto significa, que $\mathrm{Gr}(f)$ y $\mathrm{Gr}\left(f^{-1}\right)$ son conjuntos simétricos respecto de la diagonal d.

Relación entre gráficos



Fórmula de la función inversa

- Encontrar una fórmula explícita para la función inversa de una función f, es equivalente a resolver una ecuación.
- Hay que "despejar" x en la relación $y = f(x)$, lo que podrá hacerse sólo en algunos casos.
- En otros casos, el Teorema 3 es un **teorema de existencia de la función inversa**
- Si la función inversa existe, es única.
- Esto nos permite ponerle nombre a la inversa de f y estudiar sus propiedades, pero no hay en general una expresión sencilla para f^{-1}

Fórmula de la función inversa: Ejemplos

1. Las *funciones homográficas*

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{5}$$

con $ad - cb \neq 0$, tienen inversa. A pesar de no ser monótonas (¿por qué?), son inyectivas en su dominio, $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

La inversa está definida en $\mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ y es fácil obtener una expresión para ella despejando x en (5)

$$f^{-1}(y) = \frac{-dy + b}{cy - a}.$$

Fórmula de la función inversa: Ejemplos

2. Como ya se ha dicho, las potencias n-ésimas $f(x) = x^n$ son continuas y crecientes en $[0, +\infty)$, entonces tienen una inversa dada por

$$g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Las inversas de funciones crecientes son crecientes, así como las composiciones. Lo mismo vale para las decrecientes.
De manera que las funciones potenciales con exponente racional tienen inversa en $(0, +\infty)$: Si el exponente es positivo, por ser estrictamente crecientes y si es negativo, por ser estrictamente decrecientes. La inversa de $x^{\frac{m}{n}}$ es $x^{\frac{n}{m}}$.

Fórmula de la función inversa: Ejemplos

3. Las funciones trigonométricas (sen, cos y tan) no son inyectivas y hay que elegir intervalos de monotonía para obtener una inversa. Para el seno, se elige el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donde la función es estrictamente creciente. Como $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, resulta

$$\operatorname{sen}\left(\left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1].$$

Entonces, existe una función, $\operatorname{sen}^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que

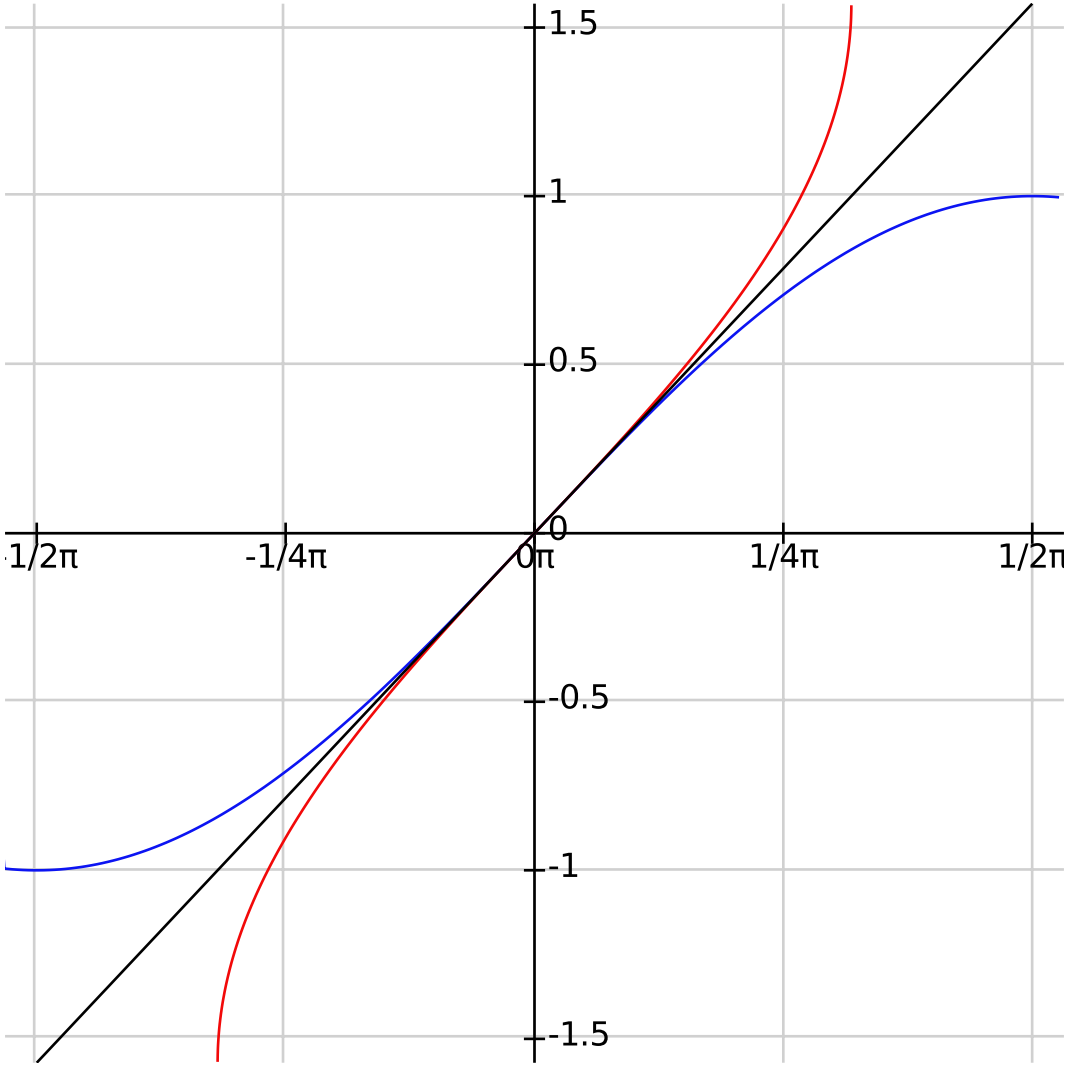
$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(x)) = x, \qquad -\tfrac{\pi}{2} \leq x \leq \tfrac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}(x)\right) = x, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Es costumbre denominar a esta función indistintamente como sen^{-1} o arcsen (arco seno).

Función inversa: Ejemplos

$y = \operatorname{sen} x$ $y = \operatorname{arcsen} x$



Fórmula de la función inversa: Ejemplos

Con similar criterio se definen las funciones inversas del coseno y la tangente

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi] \,,$$

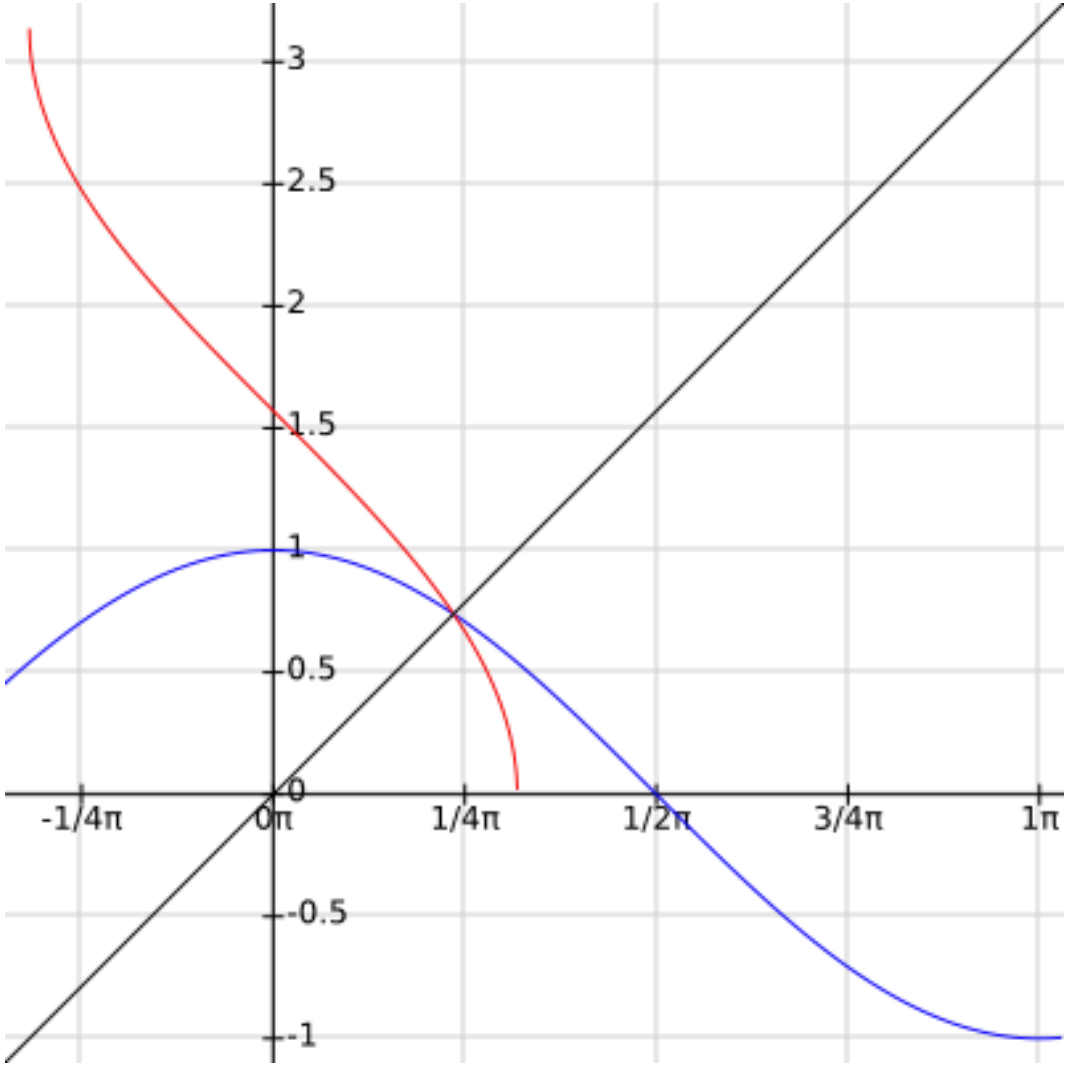
$$\arctan : (-\infty, +\infty) \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \,,$$

caracterizadas por las relaciones

$$\begin{aligned}
\arccos(\cos x) &= x, \qquad && 0 \leq x \leq \pi, \\
\cos(\arccos x) &= x, \qquad && -1 \leq x \leq 1, \\
\arctan(\tan x) &= x, \qquad && \tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}, \\
\tan(\arctan x) &= x, \qquad && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

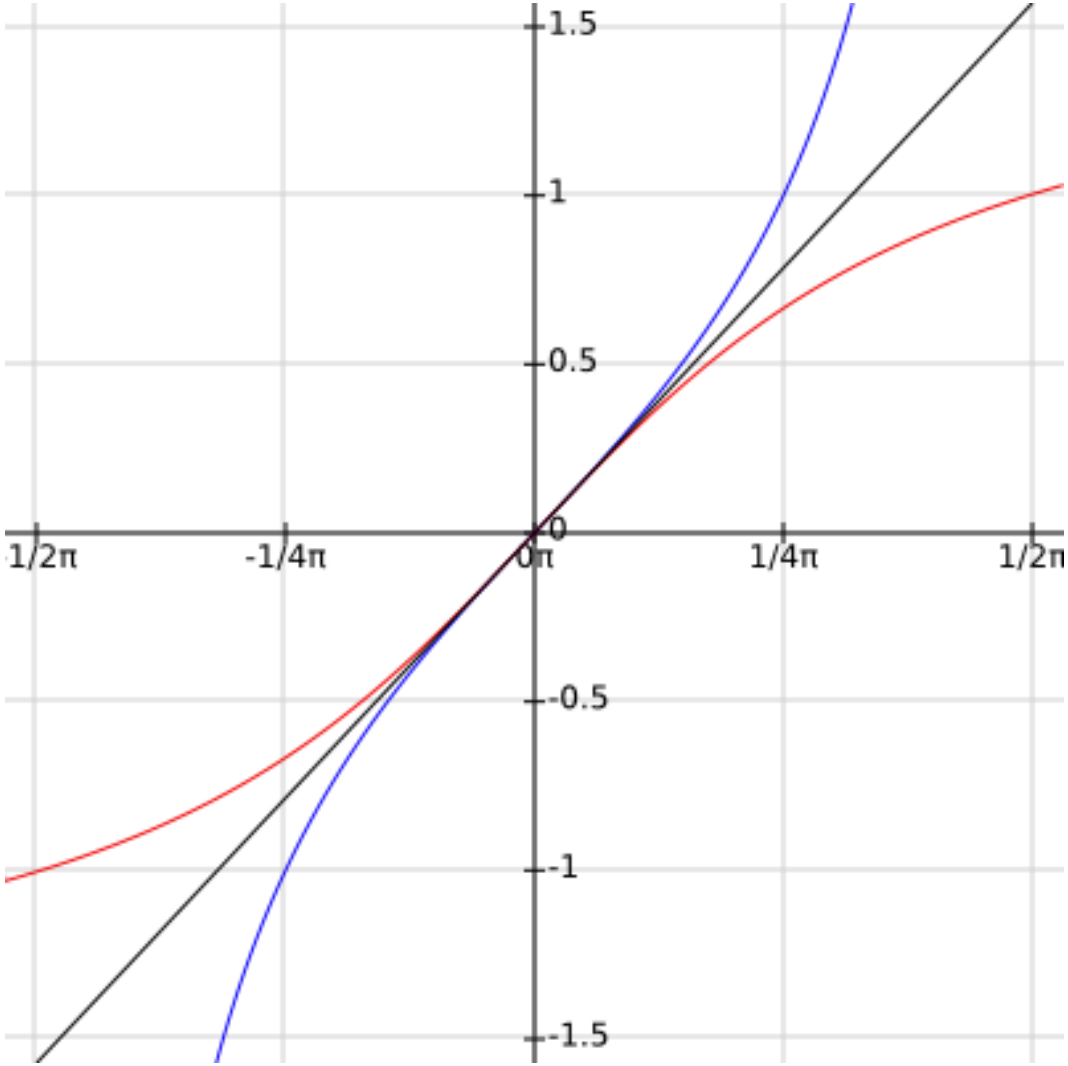
Función inversa: Ejemplos

$y = \cos x$ $y = \arccos x$



Función inversa: Ejemplos

$y = \tan x$ $y = \arctan x$



Fórmula de la función inversa: Ejemplos

4. Se pueden obtener valores exactos de las funciones trigonométricas inversas en los mismos casos en que razonamientos geométricos permitieron calcular valores exactos de las funciones trigonométricas.

   Por ejemplo, calcular $\operatorname{sen}(\arccos x)$ para $-1 \leq x \leq 1$. Como $\theta = \arccos x \in [0, \pi]$, tenemos que $\operatorname{sen}\theta \geq 0$. En consecuencia,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}.$$

   Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\arccos x) &= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} \\ &= \sqrt{1 - [\cos(\arccos x)]^2} \\ &= \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Derivada de la función inversa

- Si una función admite inversa en un intervalo, siendo que el gráfico de la inversa es la reflexión de su gráfico sobre la diagonal, esta inversa tendrá las propiedades de continuidad y derivabilidad de la función original
- Salvo que hubiera una tangente horizontal, que con la reflexión se convertiría en vertical.
- Una función f derivable en un intervalo no podrá tener inversa sin ser estrictamente monótona (Teorema 2) y, en este caso, será $f' > 0$ o $f' < 0$ en todo el intervalo.
- Si queremos que la inversa mantenga derivada finita, debemos excluir la posibilidad $f' = 0$.
- Nuestro conocimiento acerca de la regularidad de la función inversa se resume en el siguiente enunciado.

Derivada de la función inversa

Teorema 4. *Si f es continua en $[a, b]$ y admite una inversa g, entonces g es continua en su dominio $[f(a), f(b)]^*$.*

Si f es derivable en (a, b) con f' estrictamente positiva o estrictamente negativa en ese intervalo, entonces existe la inversa g, que también resulta derivable en $(f(a), f(b))^*$.

- Para el cálculo de la derivada de la inversa, se acude a la regla de la cadena. Como f y g son inversas, $f(g(y)) = y$. Derivando con respecto a y,

$$f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1 \quad \text{de donde} \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

- Dicho de otra manera,

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Derivada de la función inversa: Ejemplos

1. Retomando el ejemplo 2 de la sección anterior, aplicamos la fórmula de la derivada de la inversa con $f(x) = x^n$ y $g(y) = \sqrt[n]{y}$

$$\frac{d}{dy}\left(\sqrt[n]{y}\right) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n y^{\frac{n-1}{n}}},$$

es decir,

$$\frac{d}{dy}\left(y^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\, y^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Derivada de la función inversa: Ejemplos

2. De acuerdo con el resultado anterior y volviendo a usar la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\left(x^m\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot mx^{m-1} = \frac{m}{n}x^{m\left(\frac{1}{n}-1\right)+(m-1)}.$$

Y como $m\left(\frac{1}{n}-1\right)+(m-1) = \frac{m}{n}-1$, resulta

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Esto es, la regla conocida para exponentes enteros,

$$\frac{d}{dx}\left(x^r\right) = r\,x^{r-1}$$

es válida también para exponentes racionales.

Derivada de la función inversa: Ejemplos

3. La función *arco seno*. Restringiéndose al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la función $\operatorname{sen} x$ tiene derivada positiva. Se deduce que su inversa, $\operatorname{arcsen} x$, es derivable en $(-1, 1)$. Derivando ambos lados de la igualdad

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x,$$

y aplicando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = 1 \Longrightarrow \cos(\operatorname{arcsen} x) \cdot \frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = 1.$$

Usando que $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$, se obtiene

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Derivada de la función inversa: Ejemplos

4. La función *arco coseno*. Restringiéndose al intervalo $(0, \pi)$, la función $\cos x$ tiene derivada negativa. Su inversa $\arccos x$ es derivable en $(-1, 1)$. Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\cos\left(\arccos x\right) = 1 \Longrightarrow -\operatorname{sen}\left(\arccos x\right)\frac{d}{dx}\arccos x = 1.$$

De acuerdo con el cálculo efectuado en el ejemplo 4 de la sección anterior

$$\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},$$

entonces,

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivada de la función inversa: Ejemplos

5. La función *arco tangente*. La función $\tan x$ tiene derivada positiva en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Su inversa, $\arctan x$, es derivable en $(-\infty, +\infty)$. Derivando con la regla de la cadena,

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan x)} \cdot \frac{d}{dx} \arctan x = 1.$$

Para continuar, debe recordarse que

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(v. ejercicio 8.b.). Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Función Exponencial

- Dado un número real $a > 0$, conocemos el significado de a^x si x es un número racional
- Como todo número real se puede aproximar por sucesiones de racionales, se puede extender la función $f(x) = a^x$ para valores reales de la variable x.
- Existen otros métodos que veremos más adelante
- Por ahora aceptaremos que existe una función $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ dada por $f(x) = a^x$, y que satisface las siguientes propiedades. Ellas son, en general, la extensión de las propiedades ya conocidas para potencias de exponente racional.

$$(1)\ a^{x+y} = a^x a^y; \qquad (2)\ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}; \qquad (3)\ (a^x)^y = a^{xy}$$

Función Exponencial: Diferenciabilidad

- Estudiemos la diferenciabilidad de $f(x) = a^x$, $a > 0$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

- La existencia de este ultimo límite es la cuarta propiedad que admitiremos sin demostración:

  (4) Existe $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = C_a$.

- Nótese que $C_a = \frac{d(a^x)}{dx}|_{x=0}$. Admitida la diferenciabilidad en el origen, queda probada la diferenciabilidad en todo punto:

$$\frac{d\,(a^x)}{dx} = a^x C_a$$

Función Exponencial

- Para exponentes racionales positivos es sabido que

$$1 < a < b \Longrightarrow 1 < a^h < b^h, \qquad h > 0,\ h \in \mathbb{Q}$$

Luego,

$$0 < \frac{a^h - 1}{h} < \frac{b^h - 1}{h}.$$

- Haciendo $h \to 0^+$ a través de los racionales, se concluye de (4) que

$$0 < C_a < C_b.$$

- De $C_a > 0$ y $\frac{d(a^x)}{dx} = a^x C_a$, se deduce que a^x es creciente y dado $C_a < C_b$, la derivada en el origen de la función exponencial es mayor cuanto mayor es la base a.

Función Exponencial

- Calculamos la derivada segunda,

$$\frac{d^2\left(a^x\right)}{dx^2} = a^x C_a^2 > 0,$$

entonces a^x es convexa (cóncava hacia arriba) para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Luego (ejercicio 30, cap.3)

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

- Además,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} a^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} a^x} = 0.$$

Función Exponencial

- Hemos visto que

$$a < b \implies C_a < C_b.$$

A las exponenciales a^x con $a < 1$ les corresponden valores de $C_a < 0$. El valor $C_a = 0$ correspondería a la exponencial impropia 1^x, que es una constante.

- Por la convexidad de la función a^x se puede deducir lo siguiente para C_2 y C_3. Si $\ell_0(x)$ es la recta tangente en 0, sabemos que $\ell_0(x) < a^x$ para $x \neq 0$. Entonces,

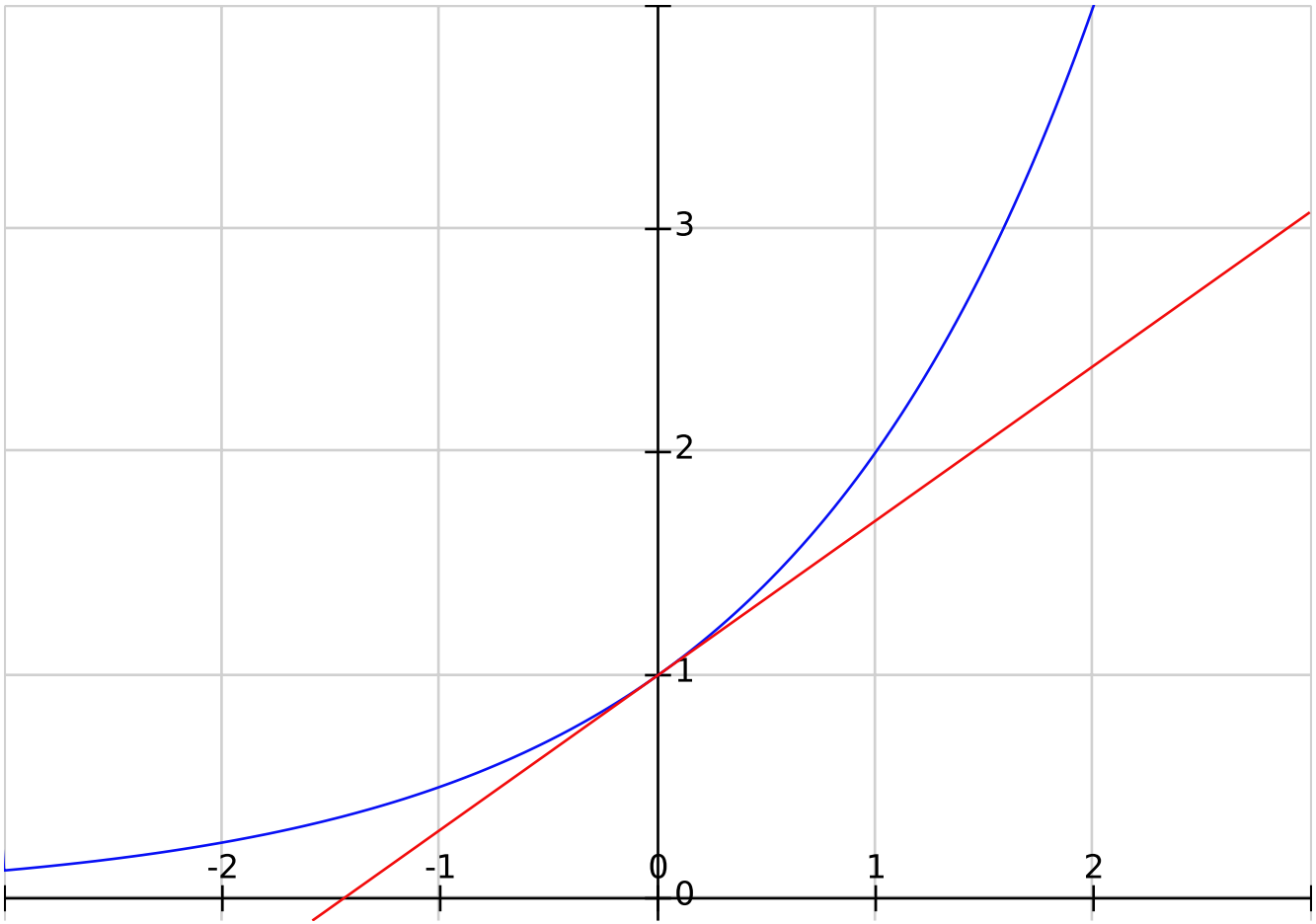
$$(a = 2) \qquad \ell_0(1) = 1 + C_2 < 2 = 2^1 \implies C_2 < 1$$

$$(a = 3) \qquad \ell_0\left(-\tfrac{1}{8}\right) = 1 - \left(\tfrac{1}{8}\right) C_3 < 3^{-\frac{1}{8}}$$

$$\implies C_3 > 8\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt[8]{3}}\right) \backsimeq 1.026 > 1.$$

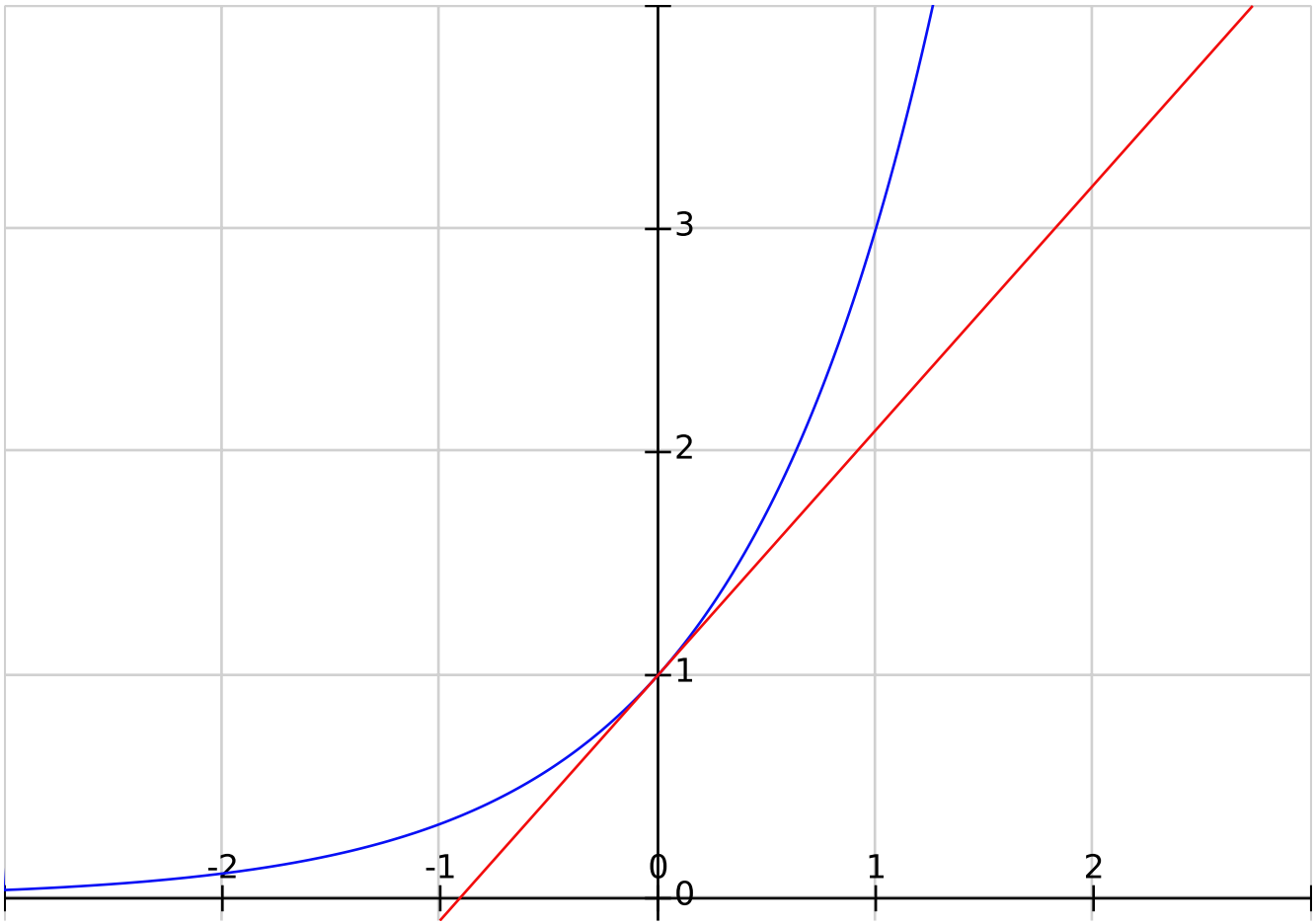
Función Exponencial

$f(x) = 2^x$ $\quad \ell_0(x) = 1 + C_2\, x$



Función Exponencial

$f(x) = 3^x$ $\quad \ell_0(x) = 1 + C_3\, x$



Función exponencial natural e^x

- Si C_a crece con a y $C_2 < 1 < C_3$, es de esperar que haya algún número $2 < e < 3$ tal que $C_e = 1$ (¿Por qué?)
- En efecto, esta será nuestra quinta suposición:

  (5) Existe un número real e tal que

$$C_e = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

- Esto implica que

$$\frac{d\left(e^x\right)}{dx} = e^x \quad \text{y} \quad \left.\frac{d\left(e^x\right)}{dx}\right|_{x=0} = 1.$$

- En una calculadora se puede comprobar que $e \cong 2.72$.

Función Logarítimica

- Dado que $e : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$ es estrictamente creciente y diferenciable, tiene una inversa que llamaremos *logaritmo natural*

$$\ln : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty),$$

que también es estrictamente creciente y diferenciable.

- La función $\ln x$ está caracterizada por:

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x, & 0 < x < +\infty, \\ \ln e^{x} &= x, & -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

- La inyectividad del logaritmo y de la exponencial son la herramienta para probar propiedades que el logaritmo hereda de su inversa.

Función Logarítimica

- La derivada de ln, sabido que existe, se calcula, por ejemplo, derivando ambos miembros de $e^{\ln x} = x$ con respecto a x:

$$\left(e^{\ln x}\right)' = 1 \implies e^{\ln x}\,(\ln x)' = 1 \implies (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

- En particular, $(\ln 1)' = 1$.
- Con respecto a la segunda derivada,

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln x = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

entonces $\ln x$ es cóncava hacia abajo.

Función Logarítimica

- Más propiedades:

$$e^0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln 1 = 0,$$

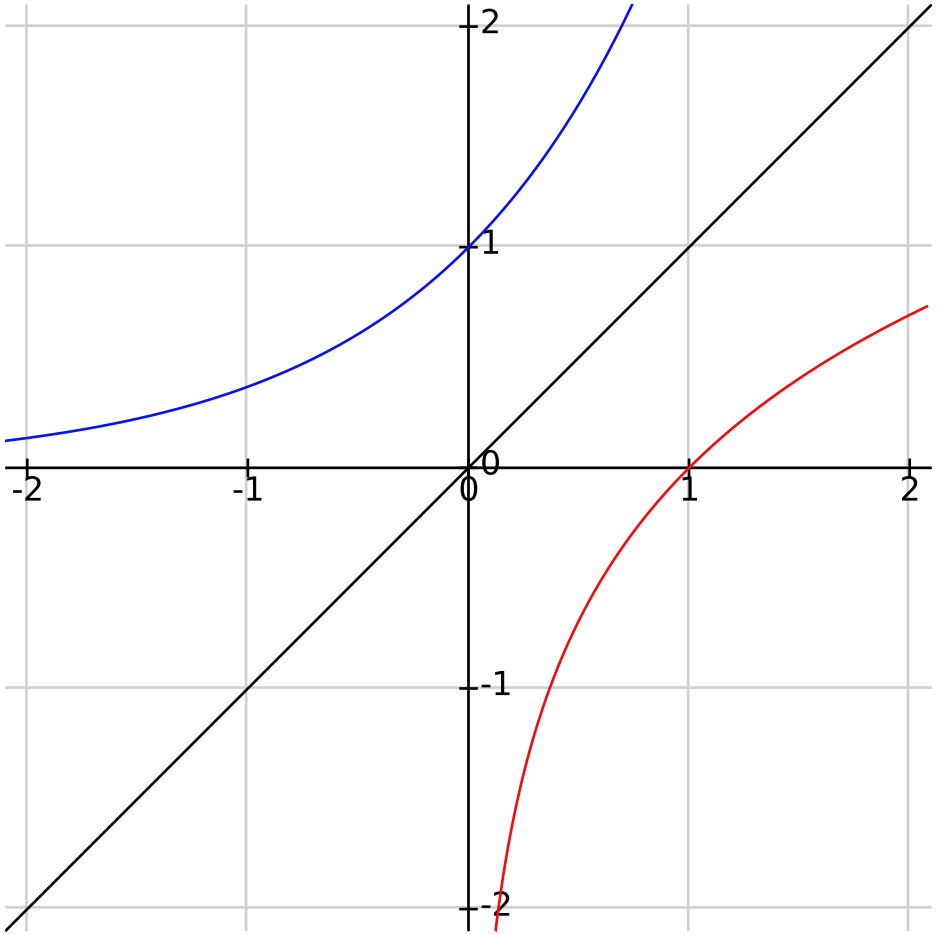
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

- Con estos datos es fácil trazar un gráfico aproximado de $y = \ln x$ que, por otra parte, será la reflexión del gráfico de $y = e^x$ respecto de la diagonal $y = x$.

Función Logarítmica

$y = e^x$ $y = \ln x$



Función Logarítmica

- La reducción de funciones exponenciales de base $a \neq 1$ a la exponencial natural se hace con ayuda del logaritmo. Si $a > 0$,

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}.$$

- Entonces podemos calcular la derivada

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

- Con esto descubrimos que el límite de la derivada de a^x en el origen no es otra cosa que el logaritmo natural de a

$$C_a = \left.\frac{d\left(a^x\right)}{dx}\right|_{x=0} = \ln a.$$